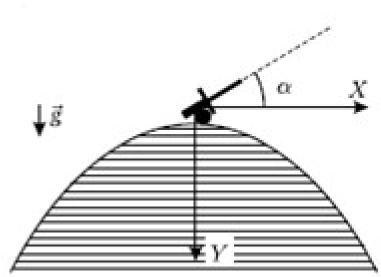
63 – osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados
11 klasės
Teorinių užduočių sprendimai



1 uždavinys. Patranka įtvirtinta kalvos viršūnėje taip, kaip parodyta brėžinyje. Kalvos geometrinė forma aprašoma parabole, kurios lygtis yra $Y = ax^2$, kur $a = \frac{1}{5000}$ m^{-1}. Artilerijos sviedinys iššaunamas $\alpha = 45^o$ kampu į horizontą. Kokiu pradiniu greičiu v_0 turi būti iššautas sviedinys, kad jis pataikytų į taikinį, esantį kalvos papėdėje $x = 1250$ m atstumu horizontalia kryptimi nuo statmens iš kalvos viršūnės į jos pagrindą ?
Laisvojo kritimo pagreitis g = 10 m/s^2.

Sprendimas.
Tarkime, kad t – sviedinio lėkio trukmė. Tuomet poslinkiai X ir Y ašių kryptimis užrašomi taip:

$$\begin{Bmatrix} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y = \frac{g t^2}{2} - v_0 \sin\alpha \cdot t \end{Bmatrix}$$ (2 balai)

Iš pirmos lygties išsireiškiame t, $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ ir gautąją išraišką statome į antrąją lygtį. Tuomet gauname sviedinio trajektorijos XY plokštumoje lygtį:

$$y = \frac{g x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} - x\,\mathrm{tg}\,\alpha$$ (2 balai)

Sviedinys nukris ant kalvos tada, kai bus tenkinama lygybė $y(x) = Y(x)$, t.y.

$$\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} - x\,\mathrm{tg}\alpha = ax^2$$ (3 balai)

Padaliname abi puses iš x^2 ir atlikę tarpinius veiksmus gauname:

$$v_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{gx}{2(\mathrm{tg}\alpha + ax)}}$$ (2 balai)

Įstatę reikšmes, surandame v_0. **Ats.:** $\boldsymbol{v_0 = 100}$ **m/s.** (1 balas)

2 uždavinys. Svyruoklės, kuri pakabinta nejudančio sraigtasparnio kabinoje, svyravimų periodas lygus T = 2,00 s. Nustatykite svyravimų periodą, jeigu: a) sraigtasparnis skrenda horizontaliai pastoviu greičiu; b) sraigtasparnis skrenda horizontaliai 2 m/s^2 pagreičiu; c) sraigtasparnis kyla 2 m/s^2 pagreičiu; d) sraigtasparnis leidžiasi 2 m/s^2 pagreičiu.

Sprendimas
a) Kadangi skrenda pastoviu greičiu, tai svyravimų periodas:

$T_1 = T_{\square} = 2,00$ s. (1 balas)

b) Judant su pagreičiu horizontalia kryptimi keičiasi siūlo įtempimo jėga. Remdamiesi brėžiniu (a pav.), atstojamąjį pagreitį galime išreikšti taip:

$g_{\text{ats}} = \sqrt{g^2 + a^2}$; (2 balai)

ir svyravimų periodas:

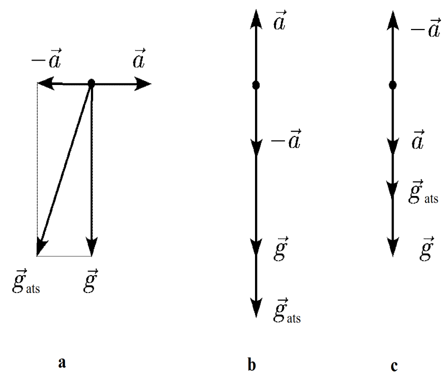
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{\text{ats}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} .$$

Svyravimų periodas nejudančiame sraigtasparnyje: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$;

Padalinę gauname: $\frac{T_2}{T} = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$. (1 balas)

Iš čia randame T_2: $T_2 = T\sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$; $T_2 \approx 1,98$ s. (1 balas)

c) Kai sraigtasparnis kyla (b pav.), atstojamasis pagreitis yra lygus: $g = g + a$; (1 balas)



Tada

$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a}}$; $\frac{T_3}{T} = \sqrt{\frac{g}{g + a}}$;

$T_3 = T\sqrt{\frac{g}{g + a}}$; $T_3 \approx 1,82$ s.

(1 balas)

d) Kai sraigtasparnis leidžiasi (c pav.), atstojamasis pagreitis yra lygus:

$g_{\text{ats}} = g - a$; (1 balas)

$T_4 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a}}$; $\frac{T_4}{T} = \sqrt{\frac{g}{g - a}}$;

$T_4 = T\sqrt{\frac{g}{g - a}}$; $T_4 \approx 2,24$ s. (1 balas)

3 uždavinys. Prie švininio svarmens, kurio temperatūra $t_0 = 0^{o}C$, pritvirtinamas ledo gabalas, kurio masė $M = 1$ kg, o temperatūra $t = -30^{o}C$, ir įleidžiamas į didelę vandens talpą, kurioje vandens temperatūra $0^{o}C$. Svarmuo su ledu iš pradžių nuskendo, o po kurio laiko – iškilo į paviršių. Kokia minimali ir kokia maksimali švininio svarmens masė? Švino tankis $\rho_s = 1{,}134 \cdot 10^4$ kg/m^3, vandens tankis $\rho_v = 1000$ kg/m^3, ledo tankis $\rho_l = 900$ kg/m^3, ledo savitoji šiluma $c_l = 2100$ J/(kg·0^{o}C), ledo lydymosi šiluma $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ J/kg.

Sprendimas.

Kadangi iš pradžių kūnas nuskęsta, tai sunkio jėga didesnė už Archimedo jėgą. (1 balas)

Sunkio jėga $F_s = (m + M)g$. (1 balas)

Archimedo jėga: $F_A = \rho_v g\left(\frac{M}{\rho_l} + \frac{m}{\rho_s}\right)$ (1 balas)

Tada $(m+M)g > \rho_v g\left(\frac{M}{\rho_l}+\frac{m}{\rho_s}\right)$ (1 balas)

Kad svarmuo su ledu nuskęstų, svarmens masė turi būti ne mažesnė kaip:

$$m_{\min} > \frac{(\rho_v-\rho_l)}{(\rho_s-\rho_v)}\frac{\rho_s}{\rho_l}M \quad ; \qquad \text{(1 balas)}$$

$m_{\min} > 0{,}122$ kg

Per tam tikrą laiką ledo temperatūra susilygina su vandens temperatūra, tam reikalinga energija susidaro kristalizuojantis vandeniui. Dėl to ledas apšąla papildoma ledo mase. (1 balas)

Papildomą ledo ΔM masę rasime iš sąryšio

$\Delta M\cdot\lambda = c_l\cdot M\cdot(t_0 - t)$ arba $\Delta M = c_l M\,(t_0 - t)/\lambda$ (1 balas)

$\Delta M = 0{,}1853$ kg

Kadangi pasibaigus ledo šilimo procesui svarmuo su ledu, kurio masė $M+\Delta M$ išplaukia į paviršių, tai Archimedo jėga tampa didesne už sunko jėgą:

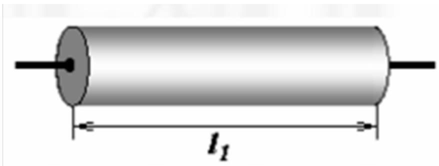
$$(m+M+\Delta M)g > \rho_v g\left(\frac{M+\Delta M}{\rho_l}+\frac{m}{\rho_s}\right) \qquad \text{(1 balas)}$$

Tuo būdu maksimali svarmens masė, kad kūnai išplauktų, lygi

$$m_{\max} < \frac{(\rho_v-\rho_l)}{(\rho_s-\rho_v)}\frac{\rho_s}{\rho_l}(M+\Delta M) \qquad \text{(1 balas)}$$

$m_{\max} > 0{,}144$ kg

Ats.: $[m_{\min}; m_{\max}] = [0{,}122; 0{,}144]$ kg (1 balas)



4 uždavinys. Cilindro formos $r_1 = 2$ mm radiuso ir $l_1 = 50$ cm ilgio laidininkas yra prijungiamas prie nuolatinės įtampos šaltinio. Po tam tikro laiko laidininko temperatūra padidėjo iki maksimalios vertės $t_1 = 57$ °C. Iki kokios maksimalios t_2 vertės padidės laidininko temperatūra, jeigu laidininkas tolygiai bus ištemptas iki $l_2 = 1$ m ilgio?

Žinoma, kad laidininko atvėsimo galia P_{atv} yra tiesiogiai proporcinga laidininko šoninio paviršiaus plotui S bei laidininko ir jį supančios aplinkos temperatūrų skirtumui: $P_{\text{atv}} = \alpha\cdot(t_i - t_0)\cdot S$, čia t_i – laidininko temperatūra, $t_0 = 20$ °C – aplinkos temperatūra, α – tam tikras pastovus proporcingumo koeficientas. *Pastaba*: Laikyti, kad tempimo proceso metu laidininko tūris V ir savitoji varža ρ nekinta.

Sprendimas

Prijungus laidininką prie nuolatinės įtampos šaltinio jo temperatūra didėja (laidininkas šyla). Didėjant laidininko temperatūrai atitinkamai didėja ir šilumos kiekis, kuris išsiskiria per laiko vienetą į aplinką (laidininkas vėsta). Tokiu būdu, po tam tikro laiko, esant tam tikrai laidininko temperatūrai t_i laidininko šilimo galia $P_{šil}$ bus lygi laidininko atvėsimo galiai P_{atv}, t.y. laidininko temperatūra pasieks maksimalią vertę ir nusistovės dinaminė pusiausvyra: 1 balas

$$P_{\text{sil}} = P_{\text{atv}} \qquad (1)$$

Įvertinus Džaulio - Lenco dėsnį dinaminės pusiausvyros sąlyga užrašoma: 1 balas

$$\frac{U^2}{R} = \alpha\cdot(t_i - t_0)\cdot S \qquad (2)$$

čia t_i – nusistovėjusi maksimali laidininko temperatūra, U – įtampa, R – laidininko varža.

Laidininko varža: $$R=\frac{\rho\cdot l}{S_{\text{pagrindo}}}=\frac{\rho\cdot l}{\pi\cdot r^2}\qquad(3)$$ 1 balas

Laidininko šoninio paviršiaus plotas: $$S=2\cdot\pi\cdot r\cdot l\qquad(4)$$ 1 balas

Įvertinus (3) ir (4) išraiškas gauname:

$$\frac{U^2\cdot\pi\cdot r^2}{\rho\cdot l}=\alpha\cdot\Delta t\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot l\Rightarrow\Delta t=\frac{U^2\cdot\pi\cdot r^2}{\alpha\cdot\rho\cdot l\cdot 2\cdot\pi\cdot r\cdot l}=\frac{U^2\cdot r}{\alpha\cdot\rho\cdot l^2\cdot 2}\qquad(5)$$ 1 balas

Kadangi laidininko tūris nekinta, tai laidininko ilgio pokytis sąlygoja laidininko radiuso pokytį: 1 balas

$$V=\pi\cdot r^2\cdot l\Rightarrow r=\sqrt{\frac{V}{\pi\cdot l}}\qquad(6)$$

Įvertinus (6) išraišką:

$$\Delta t=\frac{U^2\cdot\sqrt{\frac{V}{\pi\cdot l}}}{\alpha\cdot\rho\cdot l^2\cdot 2}=\frac{U^2\cdot\sqrt{\frac{V}{\pi}}}{\alpha\cdot\rho\cdot 2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{l}}}{l^2}=\frac{U^2\cdot\sqrt{\frac{V}{\pi}}}{\alpha\cdot\rho\cdot 2}\cdot\frac{l^{-1/2}}{l^2}=\frac{U^2\cdot\sqrt{\frac{V}{\pi}}}{\alpha\cdot\rho\cdot 2}\cdot l^{-5/2}\qquad(7)$$

Iš (7) išraiškos gauname, kad 2 balai

$$\Delta t=(t_i-t_0)=\frac{U^2\cdot\sqrt{\frac{V}{\pi}}}{\alpha\cdot\rho\cdot 2}\cdot l^{-5/2}\qquad(8)$$

Užrašome (8) išraišką esant pradiniam laidininko ilgiui l_1 ir galiniam ilgiui l_2:

$$(t_1-t_0)=\frac{U^2}{\alpha\cdot\rho\cdot 2}\sqrt{\frac{V}{\pi}}\cdot l_1^{-5/2}\quad\text{ir}\quad(t_2-t_0)=\frac{U^2}{\alpha\cdot\rho\cdot 2}\sqrt{\frac{V}{\pi}}\cdot l_2^{-5/2}\qquad(9)$$

Iš (9) gauname:

$$\frac{(t_2-t_0)}{(t_1-t_0)}=\frac{\frac{U^2}{\alpha\cdot\rho\cdot 2}\sqrt{\frac{V}{\pi}}\cdot l_2^{-5/2}}{\frac{U^2}{\alpha\cdot\rho\cdot 2}\sqrt{\frac{V}{\pi}}\cdot l_1^{-5/2}}=\frac{l_1^{5/2}}{l_2^{5/2}}\Rightarrow(t_2-t_0)=(t_1-t_0)\cdot\sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5}$$

$$t_2=\left((t_1-t_0)\cdot\sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^5}\right)+t_0\approx 26{,}5^o C\qquad(10)$$ 2 balai

Ats.: $t_2\approx 26{,}5^o C$

---

5 uždavinys.

Lazerio šviesos impulsai siunčiami iš Žemės į Mėnulį. Ar pamatys lazerio šviesą astronautas Mėnulyje, stovintis šešėlyje ir žiūrintis į Žemę? Kiek kiekvieno lazerio impulso fotonų M patenka į astronauto akį? Lazerio šviesos bangos ilgis λ = 600 nm, spindulio skersmuo lazerio išėjime D = 2 mm, impulso energija E = 0,4 J, atstumas nuo Žemės iki Mėnulio L = 380 tūkst. km, astronauto akies vyzdžio skersmuo d = 5 mm, minimalus akies jautrumas silpnai šviesai tamsoje lygus 100 fotonų, Planko konstanta $h = 6{,}6\cdot 10^{-34}$ Js. Dėl difrakcijos lazerio šviesos spindulys sklisdamas nuolat plinta, todėl jo skersmuo sklindant auga. Spindulio difrakcinės skėsties kampas (kampas kuriuo matoma lazerio šviesos dėmė ekrane žiūrint iš lazerio išėjimo) $\theta = 2\lambda/D$. Laikykite, kad lazerio spindulio skerspjūvyje šviesos intensyvumas yra vienodas, o lazerio spindulio iškraipymų ir sugertiems Žemės atmosferoje galima nepaisyti.

Sprendimas:
Dėl difrakcijos lazerio šviesos spindulys sklisdamas plinta.
Spindulio skersmuo Mėnulio paviršiuje:

$$H = \theta \cdot L = \frac{2\lambda L}{D} = 2{,}28 \cdot 10^5 m$$ (3 balai)

Dalis impulso energijos patenkanti į astronauto akį:

$$\Delta E = \left(\frac{d}{H}\right)^2 \cdot E = 9{,}62 \cdot 10^{-17} J$$ (3 balai)

Kiekvieno impulso fotonų skaičius patenkantis į astronauto akį:

$$M = \frac{\Delta E}{\frac{hc}{\lambda}} = 292$$ (3 balai)

Ats: 292 fotonai, pamatys. (1 balas)